Universität zu Köln

Fachschaft Physik

Tutorium zum Anfängerpraktikum

SS 2006

zuletzt geändert am

04.05.2006

Dieses Merkblatt ist eine Ergänzung des Turiumsprogramms der Fachschaft Physik. Als solche hat es natürlich keinerlei Anspruch auf Richtigkeit, obwohl wir uns größte Mühe bei der Erstellung geben. Es ersetzt in keinem Fall die von den Instituten ausgegebenen Praktikumsanleitungen.

Inhaltsverzeichnis

1 Fehlerrechnung

Alle hier erläuterten Fehlerrechnungen führen zu Ergebnisangaben, bei denen der tatsächliche Wert der bestimmten Größe x mit 68 % Wahrscheinlichkeit innerhalb des Intervalls $[x - \Delta x, x + \Delta x]$ liegt.

1.1 Mittelwert und Standardabweichung einer normalverteilten Messreihe

1.1.1 Messungen gleicher Genauigkeit

Mittelwert $\quad \overline{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i$

Standardabweichung der Einzelmessung $\quad s = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n} (x_i - \overline{x})^2}$

Standardabweichung des Mittelwerts $\quad s_{\overline{x}} = \sqrt{\frac{1}{n(n-1)} \sum_{i=1}^{n} (x_i - \overline{x})^2}$

Anmerkung:

1. Wegen $s_{\overline{x}} \sim \frac{1}{\sqrt{n}}$ muss man für eine doppelte Genauigkeit viermal so lange messen. Man sollte sich also gut überlegen, bis wohin sich dieser Aufwand lohnt.

2. Wenn man es wirklich einmal geschafft hat, dass die Standardabweichung verschwindet ist, so muss man natürlich trotzdem einen Fehler angeben. Die ursprünglichen Messwerte x_i waren ja alle mit einem Messfehler Δx (der für alle Messwerte gleich ist) behaftet. In diesem Fall verwendet man die Gauß'sche Fehlerfortpflanzung und erhält: $s_{\overline{x},\text{intern}} = \frac{\Delta x}{\sqrt{n}}$

1.1.2 Messungen unterschiedlicher Genauigkeit

Wenn die einzelnen Messungen x_i jeweils mit Genauigkeit Δx_i gemacht wurden, muss dies in der Mittelwertbildung durch **Wichtungsfaktoren**

$$g_i = \frac{1}{(\Delta x_i)^2}$$

berücksichtigt werden. Man erhält dann:

(Gewichteter) Mittelwert $\quad \overline{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n} g_i x_i}{\sum_{i=1}^{n} g_i}$

Standardabweichung der Einzelmessung $\quad s = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n} g_i (x_i - \overline{x})^2}$

Standardabweichung des Mittelwerts	$s_{\overline{x},\text{extern}} = \sqrt{\dfrac{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n} g_i (x_i - \overline{x})^2}{\sum_{i=1}^{n} g_i}}$
Interner Fehler des Mittelwerts	$s_{\overline{x},\text{intern}} = \frac{1}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n} g_i}}$

Man berechnet sowohl die Standardabweichung des Mittelwerts, als auch seinen internen Fehler und wählt den größeren dieser beiden Werte als Fehlerangabe des Mittelwerts.

Anmerkung:

Der interne Fehler stammt auch hier aus der Gaußschen Fehlerfortpflanzung und berücksichtigt die Messfehler.

1.2 Fehlerfortpflanzungsgesetz nach Gauß

Wenn aus gemessenen Werten $a, b, c, \ldots$ weitere Werte berechnet werden sollen, so erhält man den Fehler dieser neuen Werte nach der gaußschen Fehlerfortpflanzung:

$$
\begin{aligned}
x &= x(a, b, c, \ldots) \\
\Rightarrow \quad \Delta x &= \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial a} \cdot \Delta a\right)^2 + \left(\frac{\partial x}{\partial b} \cdot \Delta b\right)^2 + \left(\frac{\partial x}{\partial c} \cdot \Delta c\right)^2 + \ldots}
\end{aligned}
$$

1.3 Angabe von Werten

Alle während der Auswertung berechneten Werte sind in der Form

$$x = (x \pm \Delta x) \cdot \text{Zehnerpotenz Einheit} \quad \left(\pm \frac{100 \cdot \Delta x}{x} \, \% \right)$$

anzugeben. Dabei werden x und Δx auf die Stelle gerundet, an der der Fehler einsetzt. Das heißt, Δx sollte nur eine Ziffer $\neq 0$ enthalten.
Ausnahme:
Die erste Stelle von Δx ist eine 1. In diesem Fall wird eine zweite Stelle (sowohl bei Δx, als auch bei x) angegeben.
Um Rundungsfehler zu vermeiden empfiehlt es sich, für die Rechnungen ein oder zwei Stellen mehr mitzunehmen, als man in der Auswertung angibt. Das ist mit `Exel` oder einem ähnlichen Programm ja auch keinerlei Mehraufwand.

Beispiel:
Wir gehen davon aus, dass wir eine Geschwindigkeit v aus Messwerten s und t berechnet haben. Exel liefert uns dafür beispielsweise:

$$\begin{aligned} v &= \frac{s}{t} &&= 20498{,}547349609 \, \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} \\ \Delta v &= v \cdot \sqrt{\left(\frac{\Delta s}{s}\right)^2 + \left(\frac{\Delta t}{t}\right)^2} &&= 598{,}495663597 \, \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} \end{aligned}$$

Dann müsste man angeben:

$$v = (2{,}05 \pm 0{,}06) \cdot 10^4 \, \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$$

Anders wäre die Situation, wenn der Fehler z.B.

$$\Delta v = 128{,}455668557 \, \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$$

gewesen wäre. Dann hätte man angeben müssen:

$$v = (2{,}050 \pm 0{,}013) \cdot 10^4 \, \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$$

Anmerkung:
Das hier gesagte bezieht sich auf Ergebnisse und Zwischenergebnisse. Messwerte sollte man immer mit allen ablesbaren Stellen angeben.

2 Graphische Auswertung

2.1 Graphische Geradenanpassung

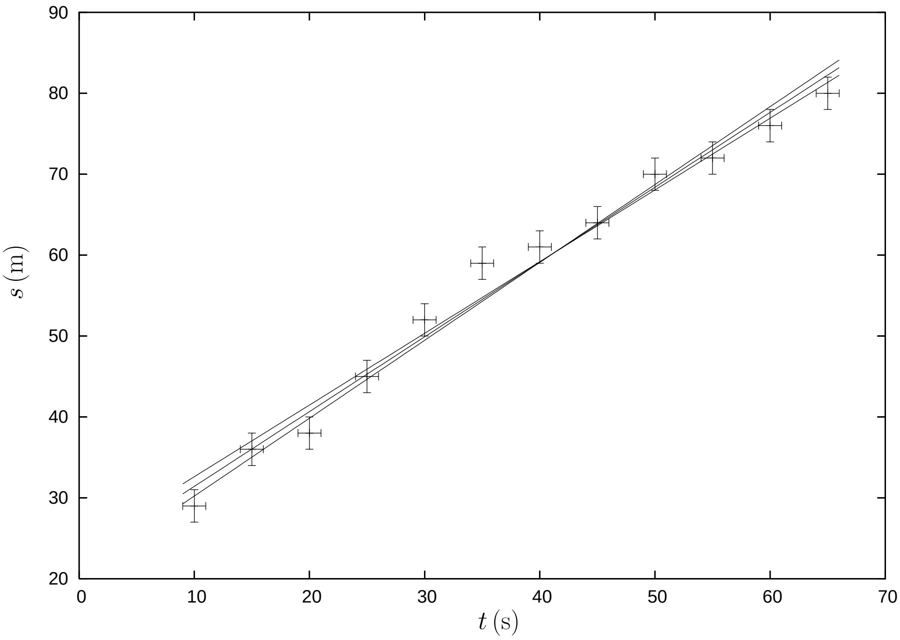

Abbildung 1: Beispiel zur graphischen Geradenanpassung. Hier ist die zeitliche Änderung einer zurückgelegten Strecke aus einem fiktiven Experiment dargestellt.

Abbildung 1 zeigt eine graphische Geradenanpassung. Sie wird wie folgt durchgeführt:

1. **Einzeichnen der Extremalgeraden:**
   Man beginnt damit, zwei Extremalgeraden einzuzeichnen. Das heißt man sucht die beiden Geraden mit der größt- bzw. kleinstmöglichen Steigung, die noch sinnvoll an die Messpunkte passen. Es gibt dabei zwei Kriterien nach denen man „sinnvoll "bewertet:

   (a) Die Geraden **müssen** durch $\frac{2}{3}$ aller Fehlerbalken gehen.

   (b) Die Geraden sollten, wenn möglich, von allen Messpunkten nicht weiter als die doppelte Länge des jeweiligen Fehlers entfernt sein, das heißt wenn man sich die Fehlerbalken der einzelnen Punkte doppelt so groß vorstellt, sollten die Geraden alle diese großen Fehlerbalken treffen.
   In Ausnahmefällen muss man diese Regel verletzen. Dies ist immer dann der Fall, wenn **einzelne** Messpunkte deutlich aus der Tendenz

der übrigen herausfallen. Liegt ein solcher Fall vor, so muss man aber in der Auswertung auf jeden Fall angeben, welcher Punkt warum herausgelassen wurde und welche Ursache man für seine Abweichung vermutet.

2. **Bestimmung der Extremalsteigungen und -achsenabschnitte:** Als nächstes werden die Steigungen a_{min} und a_{max}, sowie die y-Achsenabschnitte b_{min} und b_{max} der Extremalgeraden bestimmt. Dazu gibt es zwei Möglichkeiten:

   (a) Man zeichnet möglichst große Steigungsdreiecke an die beiden Geraden. Die Achsenabschnitte liest man als $y(x = 0)$ ab.
   Achtung: die x-Achse eines Diagramms muss nicht bei $x = 0$ anfangen. Das Wort y-Achsenabschnitt ist also etwas irreführend.

   (b) Man liest zwei weit voneinander entfernt liegende Wertepaare (x_1, y_1) und (x_2, y_2) auf jeder Extremalgeraden ab. Daraus kann man mittels des Gleichungssystems

   $$\begin{aligned} y_1 &= a \cdot x_1 + b \\ y_2 &= a \cdot x_2 + b \end{aligned}$$

   die Extremalwerte für a und b bestimmen (gemeint ist natürlich ein Gleichungssystem für jede Gerade lösen).

3. **Bestimmung und Einzeichnen der Ausgleichsgeraden:** Hat man nun a_{min}, a_{max}, b_{min} und b_{max} bestimmt, so kann man a und b berechnen:

   $$\begin{aligned} a &= \frac{a_{\text{max}} + a_{\text{min}}}{2} \\ b &= \frac{b_{\text{max}} + b_{\text{min}}}{2} \end{aligned}$$

   Den Fehler dieser Werte erhält man als

   $$\begin{aligned} \Delta a &= \frac{a_{\text{max}} - a_{\text{min}}}{2} \\ \Delta b &= \frac{b_{\text{max}} - b_{\text{min}}}{2} \end{aligned}$$

   Mit diesen Werten kann man nun die Ausgleichsgerade einzeichnen. Dies wird nicht von allen Assistenten gerne gesehen, während manche es ausdrücklich verlangen, ist aber in jedem Fall eine gute Möglichkeit seine Rechnungen zu überprüfen. Die Ausgleichsgerade sollte die Winkelhalbierende der Extremalgeraden sein. Das bedeutet aber nicht, dass man sie auf diese Weise konstruieren darf!

2.2 Geradenanpassung nach der Methode der kleinsten Fehlerquadrate

Zwischen den Größen x und y bestehe ein linearer Zusammenhang

$$y = y(x) = a \cdot x + b$$

Wenn die für diese Größen bestimmten Werte so sehr streuen, dass man innerhalb der durch die Fehlerbalken vorgegebenen Grenzen keine graphische Geradenanpassung durchführen kann, so wählt man die „rechnerische“Geradenanpassung. Ihr Ziel ist es, eine Ausgleichsgerade zu bestimmen, die die Abweichungen der Werte von der Geraden minimiert. Dies soll hier (ohne die dahinter stehende Theoire) kurz erläutert werden.
Dazu führen wir zunächst Abkürzungen ein, wobei x_i und y_i die einzelnen Messwerte seien $(i = 1, \ldots, n)$.

$$\begin{aligned}
[x] &= \sum_{i=1}^{n} x_i \\
[y] &= \sum_{i=1}^{n} y_i \\
[xx] &= \sum_{i=1}^{n} x_i^2 \\
[xy] &= \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot y_i \\
\Delta &= n \cdot [xx] - [x] \cdot [x]
\end{aligned}$$

Damit erhält man:

$$\begin{aligned}
a &= \frac{n \cdot [xy] - [x] \cdot [y]}{\Delta} \\
b &= \frac{[xx] \cdot [y] - [x] \cdot [xy]}{\Delta}
\end{aligned}$$

Nun haben wir zwar Werte für die gesuchten Parameter der Geraden $y(x)$, aber noch keine Fehler für diese Werte. Die Fehler erhält man ähnlich zu denen eines Mittelwerts über die Abweichung der gemessenen Werte von der Ausgleichsgeraden. Das heißt, man berechnet zu allen Stellen x_i Werte $y(x_i) = a \cdot x_i + b$ und bildet die Differenz zum gemessenen Wert y_i:

$$\begin{aligned}
(\Delta y)^2 &= \frac{1}{n-2} \sum_{i=1}^{n} \left(y\left(x_i\right) - y_i \right)^2 \\
\Rightarrow \quad \Delta a &= \sqrt{(\Delta y)^2 \, \frac{n}{\Delta}} \\
\Rightarrow \quad \Delta b &= \sqrt{(\Delta y)^2 \, \frac{[xx]}{\Delta}}
\end{aligned}$$

2.3 Linearisierung

Es kommt häufig vor, dass man kompliziertere Zusammenhänge $y = f(x)$ der bestimmten Größen vermutet, als lineare. Natürlich möchte man auch in diesem Fall die Parameter der beschreibenden Funktion bestimmen können. Um dies graphisch zu tun *linearisiert* man die aufgenommenen Wertepaare. Das heißt, man trägt die Werte y nicht gegen x, sondern gegen $f(x)$ auf, oder alternativ $f^{-1}(y)$ gegen x. Es gibt auch andere Möglichkeiten, die aber etwas mehr Vorüberlegungen erfordern. Häufig taucht als solche die *(doppelt-)logarithmische Auftragung* auf.
Hier auch direkt ein paar Beispiele dazu:

1. Es wird der Zusammenhang

   $$y = a \cdot e^{b \cdot x}$$

   vermutet. Durch logarithmieren erhält man

   $$\ln y \;=\; \ln(a \cdot e^{bx}) \;=\; \ln a + b \cdot x$$

   Dies hat die Form einer Geradengleichung.

2. Es wird der Zusammenhang

   $$y = a \cdot x^2 + b$$

   vermutet. Betrachtet man x^2 als neue Variable, so ist auch das eine Geradengleichung.

3. Es wird der Zusammenhang

   $$y = a \cdot x^b$$

   vermutet. Durch logarithmieren erhält man:

   $$\ln y = b \cdot \ln x + \ln a$$

   Hier muss man also $\ln y$ gegen $\ln x$ auftragen um eine Gerade zu erhalten. Daher nennt man dies *doppelt-logarithmische Auftragung*.

Hier noch ein Rechenbeispiel zur doppelt-logarithmischen Auftragung.
Als Ergebnis sollte man innerhalb der Fehlergrenzen erhalten:

$$a = 2\ ,\quad b = 3$$

x	y	$\ln x$	$\ln y$
1±0,1	3± 1	0,00± 0,10	1,1±0,3
2±0,1	19± 4	0,69± 0,05	2,9±0,2
3±0,1	49± 10	1,10± 0,03	3,9±0,2
4±0,1	140± 30	1,39± 0,03	4,9±0,2
5±0,1	230± 60	1,61± 0,02	5,4±0,3
6±0,1	390±120	1,792±0,017	6,0±0,3
7±0,1	800±200	1,946±0,014	6,7±0,3
8±0,1	800±300	2,079±0,013	6,7±0,4
9±0,1	2100±500	2,197±0,011	7,6±0,2
10±0,1	2200±600	2,303±0,010	7,7±0,3

Tabelle 1: Ein Beispiel zur doppelt-logarithmischen Auftragung

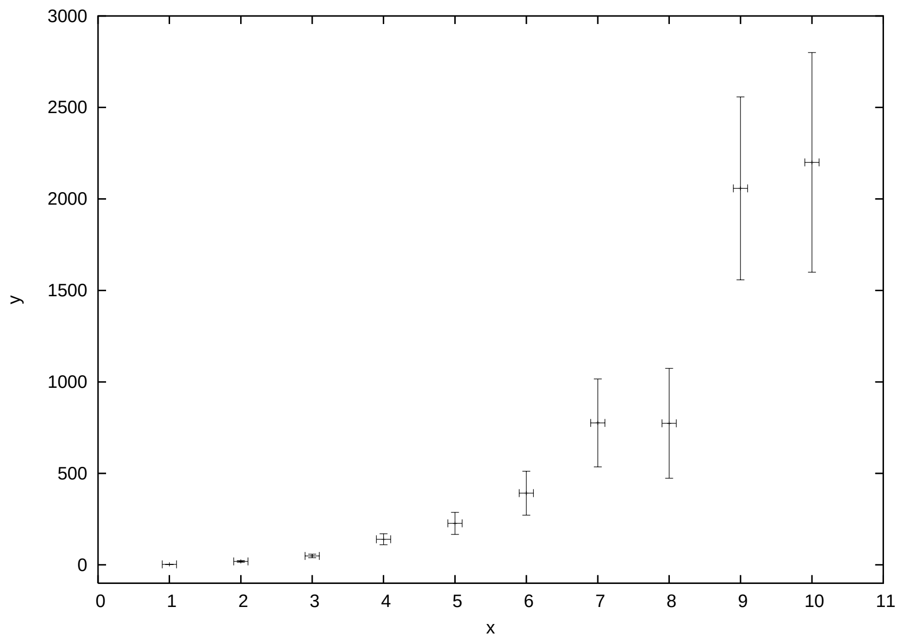

Abbildung 2: Beispiel zur Linearisierung: Vermuteter Zusammenhang $y = a \cdot x^b$

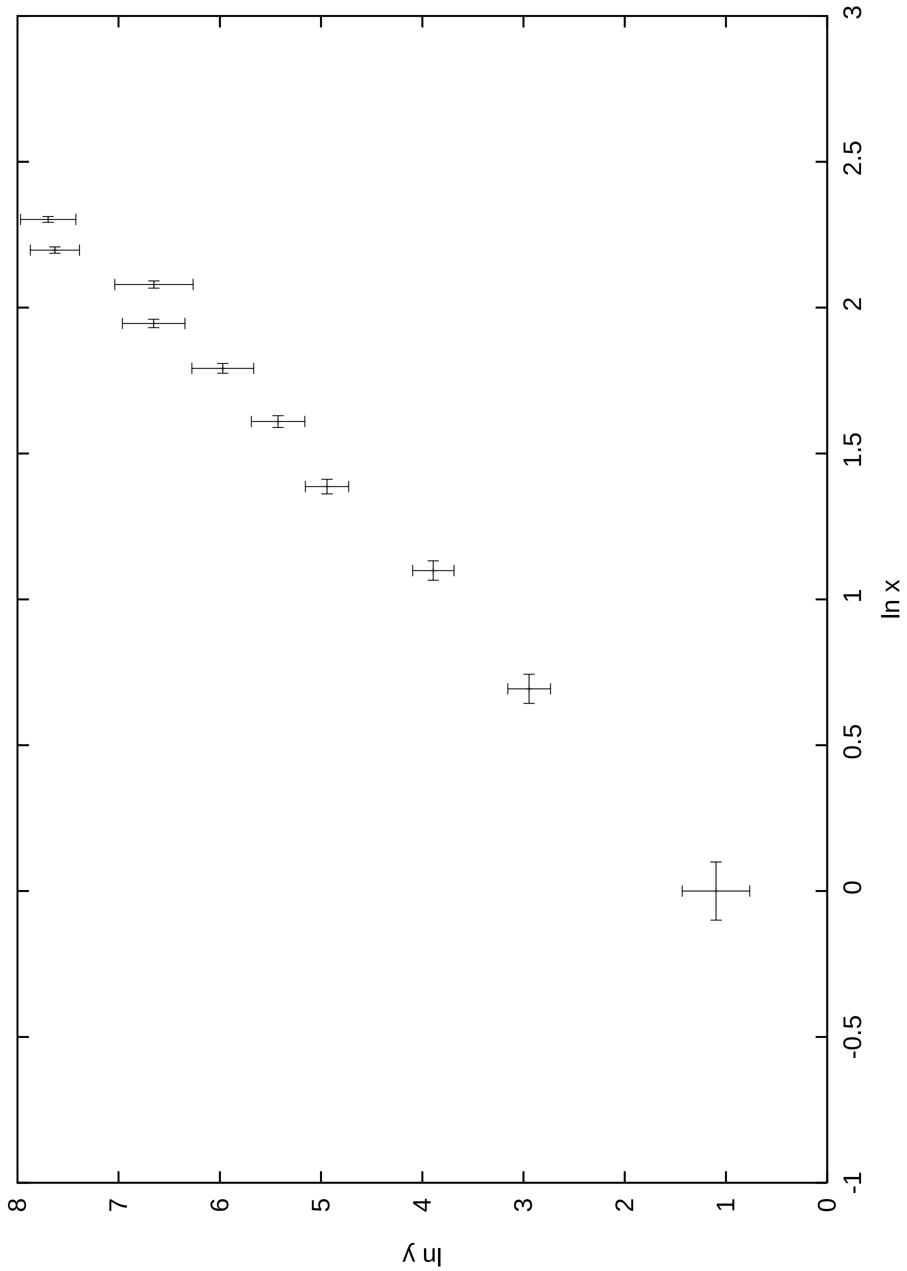

Abbildung 3: Beispiel zur Linearisierung: doppelt-logarithmische Auftragung

2.4 Ablesen von Werten aus Diagrammen

Das ist erstmal so einfach wie es klingt. Aber es fragt sich natürlich, wie man die Fehler für die so erhaltenen Werte bestimmt. Dazu muss man zwei Fälle unterscheiden. (Wir gehen davon aus, dass x bekannt und y gesucht ist, das ist selbstverständlich auch andersherum möglich.)

1. Man weiß genau, an welcher Stelle man den Wert ablesen möchte, das heißt x (z.B.) ist fehlerlos vorgegeben. In diesem Fall ist der für y angegebene Fehler eine Abschätzung, wie genau es gelungen ist, den Wert dort abzulesen. Abweichungen passieren hier auf beiden Achsen, da sie eine diskrete Skalierung haben, und man üblicherweise irgendwo dazwischen ablesen muss. Als Fehler gibt man hier mindestens die Hälfte eines y-Skalenteils an. Eine weitere Quelle für Ablesefehler ist die Strichdicke des Graphen. Auch das muss bei der Fehlerabschätzung berücksichtigt werden.

2. Man hat den x-Wert schon fehlerbehaftet vorgegeben. In diesem Fall kommt zu den oben genannten Fehlerquellen noch eine weitere hinzu. Man muss sich also anschauen, um wieviel sich der y-Wert verändert, wenn man x bis an die Fehlergrenzen variiert. Diese y-Variation ist der hauptsächliche Fehler für y, zu dem man die anderen Fehlerquellen hinzuzählen muss.

Es versteht sich natürlich von selbst, dass sich das hier beschriebene Verfahren auf nicht-lineare Zusammenhänge bezieht. Bei linearen bestimmt man die Ausgleichsgerade und berechnet damit die gesuchten Werte.